

# Непрерывность в точке

13 июля

**Опр.** Дано подмножество  $E$  вещественной прямой. Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной в точке  $a$ , если выполнено любое из следующих равносильных условий:

- Для любой последовательности  $\{a_n\} \subseteq E$ , сходящейся к  $a$ , последовательность  $\{f(a_n)\}$  сходится к  $f(a)$ ;
- Для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $|x - a| < \delta$ , то  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

В этом случае пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Говорят, что функция  $f$  непрерывна, если она непрерывна в каждой точке области определения.

**I.** Определите, в каких точках непрерывны функции

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x); \quad f(x) = [x], \quad f(x) = 1/x, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**II.** Функции  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны. Проверьте, что функции  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $g \circ f$  также непрерывны. Что можно сказать о функции  $f/g$ ?

**Опр.** Если последовательность  $\{a_n\}$  такова, что для любого  $k$  только конечное число членов последовательности меньше  $k$ , то говорят, что она стремится к бесконечности.

**III.** Что означает запись  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ ? Определите двумя способами, докажете их равносильность.

1. Докажите, что условия в первом определении действительно равносильны.

2. Функция  $f$ , заданная на отрезке  $[a, b]$ , непрерывна. Докажите, что:

(а) Не существует последовательности  $\{a_n\} \subset [a, b]$  такой, что  $f(a_k) > k$  для любого  $k$ .

(б) На отрезке  $[a, b]$  существуют точки  $c$  и  $c'$  такие, что

$$\forall x \in [a, b] \quad f(c) \leq f(x) \leq f(c').$$

(в) При любом  $f(c) \leq y \leq f(c')$  найдётся  $x \in [a, b]$ , для которого  $f(x) = y$ .

Таким образом, мы доказали три важные теоремы:

- Непрерывная функция на отрезке ограничена.
- Непрерывная функция на отрезке достигает максимума и минимума.
- Непрерывная функция на отрезке принимает все промежуточные значения.

3. (а) Докажите, что на экваторе существуют пара диаметрально противоположных точек с одинаковой температурой воздуха.

(б) Вчера в полночь было холоднее, чем в полночь позавчера и сегодня. Докажите, что найдется один и тот же момент времени вчера и сегодня, когда температура была одинакова.

4. В противоположных углах квадратного пруда со стороной 10 м находятся два лебедя. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент расстояние между кончиками их клювов было ровно 12 м.

5. Имеется бутерброд с колбасой и сыром. Докажите, что можно одним взмахом ножа поделить пополам хлеб, колбасу и сыр.

6. Непрерывная функция  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такова, что  $f(0) = f(1) = 0$ . Докажите, что для каждого  $\lambda \in [0, 1]$  на графике  $f$  найдётся горизонтальная хорда длины  $\lambda$ .

7. На отрезке  $[0, 1]$  отмечены точки  $x_1, \dots, x_n$ . Докажите, что на нём найдётся точка  $x$  такая, что

$$\frac{|x_1 - x| + \dots + |x_n - x|}{n} = \frac{1}{2}.$$

8. (а) **Функция Римана.** Функция  $f(x)$  равна нулю, если  $x$  иррационально, и равна  $1/b$ , если  $x$  представлено в виде несократимой дроби  $a/b$ . Определите, в каких точках данная функция непрерывна.

(б) Существует ли непрерывная функция, которая в рациональных точках принимает иррациональные значения, а в иррациональных — рациональные?

(в) Придумайте функцию, которая была бы определена на всей вещественной прямой и была бы непрерывна ровно в двух её точках.